

# 2016 年更生日報盃數學大賽(第 12 屆)高中二年級試題

(單選題共 25 題，每題 4 分，共計 100 分，答錯不倒扣)

※ 答案卡必須使用 2B 鉛筆畫記。

1.  $\log_{10}x + a \log_x 10 = b$ ，甲看錯  $a$ ，解得兩根為 100, 100，乙看錯  $b$ ，解得兩根為 100 及  $\sqrt{1000}$ ，若正確之解為  $\alpha, \beta$  且  $\alpha > \beta$ ， $\frac{\alpha}{\beta} = ?$

(A)100 (B) $\sqrt{1000}$  (C)200 (D)150 (E)以上皆非

解：原式  $\Rightarrow \log_{10}x + \frac{a}{\log_{10}x} = b \Rightarrow (\log_{10}x)^2 - b \times \log_{10}x + a = 0$ ，

甲看錯  $a$ ，得二根為 100, 100  $\Rightarrow b$  正確，

$\therefore \log_{10}100 + \log_{10}100 = b$ ， $\therefore 2 + 2 = b \Rightarrow b = 4$ ，

乙看錯  $b$ ，得二根為 100,  $\sqrt{1000} \Rightarrow a$  正確，

$\therefore \log_{10}100 \times \log_{10}\sqrt{1000} = a$ ， $\therefore 2 \times \frac{3}{2} = a \Rightarrow a = 3$ ，

即原式為  $(\log_{10}x)^2 - 4 \log_{10}x + 3 = 0 \Rightarrow (\log_{10}x - 1)(\log_{10}x - 3) = 0 \Rightarrow \log_{10}x = 1$  或 3，

$\therefore x = 10$  或  $1000 \Rightarrow \alpha = 1000, \beta = 10 \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = 100 \therefore$ 選(A)

2.  $81(0.666)^4 - 54(0.666)^3 - 63(0.666)^2 + 39(0.666) + 5 = ?$

(A)3.014 (B)3.015 (C)3.016 (D)3.017 (E)以上皆非 (近似值到小數點後第三位)

解：令  $f(x) = 81x^4 - 54x^3 - 63x^2 + 39x + 5$

81	- 54	- 63	+ 39	+ 5	$\left  \frac{2}{3} \right.$
	+ 54	+ 0	- 42	- 2	
81	+ 0	- 63	- 3	+ 3	
	+ 54	+ 36	- 18		
81	+ 54	- 27	- 21		
	+ 54	+ 72			
81	+ 108	+ 45			
	+ 54				
81	+ 162				

$$f(x) = 81\left(x - \frac{2}{3}\right)^4 + 162\left(x - \frac{2}{3}\right)^3 + 45\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - 21\left(x - \frac{2}{3}\right) + 3$$

$$= (3x - 2)^4 + 6(3x - 2)^3 + 5(3x - 2)^2 - 7(3x - 2) + 3$$

令  $x = 0.666$ ，則  $3x - 2 = 1.998 - 2 = -0.002$

故  $f(0.666) = 3 - 7 \times (-0.002) + 5 \times (-0.002)^2 + \dots \approx 3.014 \therefore$ 選(A)

3. 從 1~20 的自然數中，任取相異三數，若假設每個數字被取的機會均等，則取出的數中任兩個數都至少差 3 (包含 3) 的機率為

(A) $\frac{26}{57}$  (B) $\frac{28}{57}$  (C) $\frac{10}{19}$  (D) $\frac{32}{57}$  (E)以上皆非

解：設取到三數為  $a, b, c$ ，四個間隔  $x, u, y, z$ ，如圖所示：  

$$\frac{-a}{x} \frac{\square\square}{y} b \frac{\square\square}{z} c \frac{-}{u}$$

$\Rightarrow x + y + z + u = 17$ ，且  $x \geq 0, u \geq 0, y \geq 2, z \geq 2$ ，

令  $y' = y - 2, z' = z - 2$ ，則  $x + y' + z' + u = 13 \Rightarrow n(A) = H_{13}^4 = C_{13}^{16}$

$$\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{C_3^{16}}{C_3^{20}} = \frac{\frac{16 \times 15 \times 14}{3!}}{\frac{20 \times 19 \times 18}{3!}} = \frac{28}{57} \therefore$$
選(B)

4. 從 1 至 1000 的自然數中，數字裡有 2 且有 5 的數 (例：525 算一個) 有  
 (A)50 (B)51 (C)52 (D)53 (E)54 個

解：

①不含「0」 $\uparrow$

(A)  $\square\square \Rightarrow 2$ ， $\uparrow$

(B)  $\square\square\square \Rightarrow 7 \times 3! = 42$ ， $\uparrow$

$\uparrow \quad 2 \quad 5$

7 種 $\uparrow$

$\uparrow$

(C)  $\square\square\square\square \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2 \quad 2 \quad 5 \\ \square\square\square \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{3!}{2!} \times 2 = 6$ ，  
 $\uparrow \quad 5 \quad 5 \quad 2 \downarrow$

②含「0」 $\downarrow$

$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 5 & 0 \\ \hline \end{array} \downarrow$

$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 0 & 5 \\ \hline \end{array} \downarrow$

$\downarrow \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 5 & 0 & 2 \\ \hline \end{array} \downarrow$

$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 5 & 2 & 0 \\ \hline \end{array} \uparrow$

$\left. \begin{array}{l} \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \uparrow \end{array} \right\} 4$

由①②可得，所求為  $2 + 42 + 6 + 4 = 54$  (個)  $\therefore$ 選(E)

5. 甲、乙、丙、丁、戊五人由地下一樓搭電梯前往一、二、三不同的樓層，則每層樓當電梯打開時，都會有人出來的情形有

(A)150 (B)151 (C)152 (D)153 (E)154 種

解： $1 \times 3^5 - 3 \times 2^5 + 3 \times 1^5 - 1 \times 0^5 = 150 \therefore$ 選(A)

6. 若  $a, b, c$  成等比數列，則二次函數  $y = ax^2 + bx + c$  的圖形與  $x$  軸的交點數有  
(A) 0 個 (B) 1 個 (C) 2 個 (D) 3 個 (E) 無法確定

解：∵  $ax^2 + bx + c = 0$  之判別式  $D = b^2 - 4ac$

$$\text{又 } \frac{c}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow b^2 = ac > 0$$

$$b^2 - 4ac = ac - 4ac = -3ac < 0 \Rightarrow \text{無交點，故選(A)}$$

7. 下列哪一個數不可利用尺規在數線上標出其位置？

(A)  $\frac{16}{19}$  (B)  $\sqrt[4]{3}$  (C)  $\sqrt[5]{6}$  (D)  $\sqrt{\sqrt{3}+2}$  (E)  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

解：(A) 有理數可尺規作圖

(B) 偶數次偶次方根可尺規作圖  $\Rightarrow$  先作  $\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{\sqrt{3}} = \sqrt[4]{3}$

(C) ∵  $\sqrt[5]{6}$  不可用尺規作圖  $\Rightarrow \sqrt[5]{6}$  亦不可

(D) 先作  $\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3} + 2 \Rightarrow \sqrt{\sqrt{3} + 2}$

(E) 可 故選 (C)

8. 設  $x, y \in \mathbf{R}$ ，且  $|x-1| \leq 2$ ， $|y+1| \leq 2$ ，若  $t = x^2 - 3y$ ，則  $t$  的範圍為  
(A)  $-3 \leq t \leq 18$  (B)  $-2 \leq t \leq 18$  (C)  $6 \leq t \leq 9$  (D)  $6 \leq t \leq 10$  (E)  $t$  為任意實數

解：∵  $|x-1| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x-1 \leq 2 \Rightarrow -1 \leq x \leq 3 \quad \therefore 0 \leq x^2 \leq 9$

∵  $|y+1| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq y+1 \leq 2 \Rightarrow -3 \leq y \leq 1$

∴  $-9 \leq 3y \leq 3 \Rightarrow -3 \leq -3y \leq 9$

故  $-3 \leq x^2 - 3y \leq 18 \quad \therefore -3 \leq t \leq 18$ ，故選 (A)

9. 某班級有男生 18 人，女生 12 人，其中  $A$  為某男生， $B$  為某女生，今要以抽籤方式決定誰去參加數學檢定，則下列哪些情況的敘述是正確的？  
(A) 如果只需抽測一位學生，則  $A$  被抽到的機率大於  $B$  被抽到的機率  
(B) 如果只需抽測兩位學生，則  $A$  被抽到的機率大於  $B$  被抽到的機率  
(C) 如果只需抽測兩位學生，則抽到兩位都是男生的機率大於兩位都是女生的機率  
(D) 如果只需抽測兩位學生，則抽到一男一女的機率為  $\frac{72}{190}$   
(E) 以上皆非

解：(A)  $\times$ ； $P(A) = P(B) = \frac{1}{30}$  (B)  $\times$ ； $P(A) = P(B) = \frac{C_1^{29}}{C_2^{30}} = \frac{1}{15}$

(C)  $\circ$ ； $P(2 \text{ 男}) = \frac{C_2^{18}}{C_2^{30}} = \frac{18 \times 17}{30 \times 19}$   $P(2 \text{ 女}) = \frac{C_2^{12}}{C_2^{30}} = \frac{12 \times 11}{30 \times 19}$

∴  $P(2 \text{ 男}) > P(2 \text{ 女})$

(D)  $\times$ ； $P(1 \text{ 男 } 1 \text{ 女}) = \frac{C_1^{18} C_1^{12}}{C_2^{30}} = \frac{72}{145}$ ，故選 (C)

10.  $315a21$  為六位數，若分數  $\frac{315a21}{24}$  可化為有限小數，則阿拉伯數字  $a$  有幾種可能？

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

解：若  $\frac{b}{a}$  為有限小數，則  $a$  只能有 2 或 5 的質因數

∵  $24 = 3 \times 2^3 \quad \therefore \frac{315a21}{24}$  為有限小數  $\Rightarrow 3 \mid 315a21$

$\Rightarrow 3 \mid 3 + 1 + 5 + a + 2 + 1 = 12 + a \quad \therefore a$  可為 0, 3, 6, 9 共 4 個，故選 (A)

11. 估計  $2^{\frac{3}{5}}$  最接近下列何數？ (A)  $\frac{1}{2}$  (B) 1 (C)  $\frac{3}{2}$  (D) 2 (E)  $\frac{5}{2}$

解：令  $x = 2^{\frac{3}{5}}$ ， $\therefore x^5 = 2^3 = 8$ ，設  $f(x) = x^5 - 8$ ，

∴  $f(x) = 0$  恰有一個正實根（另四根為共軛虛根），

∵  $f(1) = -7$ ， $f(2) = 24$ ， $\therefore f(1)f(2) < 0$ ， $\therefore 1 < 2^{\frac{3}{5}} < 2$ ，

又  $f(1.5) = 7.59375 - 8 = -0.40625$ ， $1.5 < 2^{\frac{3}{5}} < 2$  且較接近  $\frac{3}{2} = 1.5$

( $\therefore f(1.5) = -0.40625$  較  $f(2) = 24$  接近於 0)，故選 (C)

12. 設  $f(x)$  為四次的多項式，若  $f(1) = f(2) = f(3) = 5$ ， $f(4) = 11$ ， $f(5) = 77$ ，則  $f(0) =$  (A) 0 (B) -6 (C) 5 (D) 36 (E) 47

解：設  $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(ax+b) + 5$ ，

$f(4) = 3 \times 2 \times 1 \times (4a+b) + 5 = 11 \Rightarrow 4a+b = 1$ ，

$f(5) = 4 \times 3 \times 2 \times (5a+b) + 5 = 77 \Rightarrow 5a+b = 3$ ， $\therefore a = 2, b = -7$ ，

即  $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(2x-7) + 5$

$\Rightarrow f(0) = (-1)(-2)(-3)(-7) + 5 = 47$ ，故選 (E)

13. 設  $f(x) = (3x^5 - 3x^3 + 5x^2 - 4)^{17}$  的展開式中，係數和為  $a$ ，奇次項係數和為  $b$ ，偶次項係數和為  $c$ ，則  $a+b+c$  為

(A) -1 (B) -2 (C) 1 (D) 2 (E) 3

解：∵  $b+c=a$ ， $a+b+c=2a$

$2a = 2f(1) = 2 \times 1^{17} = 2$ ，故選 (D)

14. 數列  $\{a_n\}$  中， $S_n = \frac{3}{2}(a_n - 1)$ ，則  $a_n =$

(A)  $3n$  (B)  $3^n$  (C)  $2n+1$  (D)  $2^n-1$  (E)  $2^n+1$

解：n=1 時， $S_1=a_1$ ， $a_1=\frac{3}{2}(a_1-1)\Rightarrow a_1=3$

n=2 時， $S_2=a_1+a_2=3+a_2$ ， $3+a_2=\frac{3}{2}(a_2-1)\Rightarrow a_2=9=3^2$

n=3 時， $S_3=3+9+a_3=12+a_3$ ， $12+a_3=\frac{3}{2}(a_3-1)\Rightarrow a_3=27=3^3$

猜測  $a_n=3^n$ ，故選 (B)

15.  $(1+x)^{1000}+x(1+x)^{999}+x^2(1+x)^{998}+\dots+x^{1000}$  展開式中， $x^{50}$  項之係數為 (A)  $\frac{1001!}{50!951!}$  (B)  $\frac{1001!}{49!952!}$  (C)  $\frac{1000!}{50!950!}$  (D)  $\frac{1001!}{51!950!}$  (E)  $\frac{1000!}{49!951!}$

解： $(1+x)^{1000}+x(1+x)^{999}+x^2(1+x)^{998}+\dots+x^{1000}$

$$= \frac{(1+x)^{1000} [1 - (\frac{x}{1+x})^{1001}]}{1 - \frac{x}{1+x}} = \frac{(1+x)^{1001} [1 - (\frac{x}{1+x})^{1001}]}{(1+x) - x} = (1+x)^{1001} - x^{1001}$$

得  $x^{50}$  項係數為  $C_{50}^{1001} = \frac{1001!}{50!(1001-50)!} = \frac{1001!}{50!951!}$ ，故選 (A)

16. 設  $A = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ ， $B = \{-2, -1, 1, 2\}$ ，又  $a \in A$ ， $b \in B$ ，則

$x^2+ax+b=0$  有實根之機率為 (A)  $\frac{3}{4}$  (B)  $\frac{2}{4}$  (C)  $\frac{1}{4}$  (D)  $\frac{1}{3}$  (E)  $\frac{2}{3}$

解：  $D=a^2-4b \geq 0$

a	b
-3, -2, -1, 1, 2, 3	-2
-3, -2, -1, 1, 2, 3	-1
-3, -2, 2, 3	1
-3, 3	2

$$\therefore p = \frac{6+6+4+2}{6 \times 4} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}, \text{ 故選(A)}$$

17. 設  $n \in \mathbb{N}$ ，且  $1+2+4+8+\dots+2^n=2047$ ，則 n=

(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12 (E) 13

解： $1+2+4+8+\dots+2^n = \frac{1(2^{n+1}-1)}{2-1} = 2^{n+1}-1=2047$

$$\Rightarrow 2^{n+1}=2048=2^{11} \Rightarrow n+1=11 \Rightarrow n=10, \text{ 故選 (B)}$$

18. 所謂某個年齡範圍的失業率，是指該年齡範圍的失業人數與勞動力人數之比，以百分數表達（進行統計分析時，所有年齡以整數表示）。下表為去年某國四個年齡範圍的失業率，其中的年齡範圍有所重疊。

年齡範圍（歲）	35~44	35~39	40~44	45~49
失業率（%）	12.66	9.80	13.17	7.08

請根據上表選出正確的選項？

(A) 在上述四個年齡範圍中，以 40~44 歲的失業率為最低

(B) 40~44 歲勞動力人數多於 45~49 歲勞動力人數

(C) 40~49 歲的失業率等於  $(\frac{13.17+7.08}{2})\%$

(D) 35~39 歲勞動力人數少於 40~44 歲勞動力人數

(E) 如果 40~44 歲的失業率降低，則 45~49 歲的失業率會升高。

解：設各範圍的勞動人數如下：

年齡範圍（歲）	35~39	40~44	45~49
勞動人數（人）	a	b	c

(A) 在失業率中，以 13.17% 最高

(B) 僅由題意，不能確定  $b > c$

(C) 40~49 歲的失業率為  $\frac{b \times 13.17\% + c \times 7.08\%}{b+c}$ ，不一定等於  $(\frac{13.17+7.08}{2})\%$

(D) 因為  $\frac{a \times 9.80\% + b \times 13.17\%}{a+b} = 12.66\%$ ，即  $9.80a + 13.17b = 12.66(a+b)$

$$\Rightarrow 2.86a = 0.51b, \text{ 所以 } a < b$$

(E) 僅由題意，不能推得此結論，故選(D)

19. 試求  $(6a^{\frac{2}{5}} - a^{\frac{1}{5}} - 2) \div (2a^{\frac{1}{5}} + 1) =$

(A)  $-3a^{\frac{1}{5}} + 2$  (B)  $3a^{\frac{1}{5}} + 2$  (C)  $3 - 2a^{\frac{1}{5}}$  (D)  $3 + 2a^{\frac{1}{5}}$  (E)  $3a^{\frac{1}{5}} - 2$

解：令  $x = a^{\frac{1}{5}}$

$$\text{先求 } \frac{6x^2 - x - 2}{2x + 1} = 3x - 2, \text{ 所求} = 3a^{\frac{1}{5}} - 2, \text{ 所以選(E)}$$

20. 投擲一骰子四回，出現的點數依次為  $a, b, c, d$ ，若在直角坐標平面上有兩點

$P(a, b)$ ， $Q(c, d)$ ，若  $P, Q$  兩點的距離為 0 的機率為

(A)  $\frac{1}{36}$  (B)  $\frac{5}{54}$  (C)  $\frac{65}{81}$  (D)  $\frac{85}{162}$  (E)  $\frac{25}{324}$

解： $x^2 = (a-c)^2 + (b-d)^2$ ，若  $x=0 \Rightarrow a=c, b=d \Rightarrow 6 \times 6 = 36$  (種)

$$\text{機率為 } \frac{6^2}{6^4} = \frac{1}{36}, \text{ 所以選(A)}$$

21. 擲甲、乙兩個骰子，令點數和為  $k$  的事件為  $A$ ，甲骰子點數為 1 的事件為  $B$ ，若  $A$ ， $B$  獨立，則  $k =$

- (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 7 (E) 10

解：  $A = \{\text{點數和為 } k\}$ ， $B = \{\text{點數為 } 1\}$

$$P(B) = \frac{1}{6}, P(A) = \frac{k-1}{36}, k = 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$\therefore \text{當 } k=7, P(A \cap B) = \frac{1}{36}, \text{而 } P(A) = \frac{1}{6}, P(B) = \frac{1}{6}$$

$$\therefore P(A \cap B) = P(A)P(B), A, B \text{ 獨立, 所以選(D)}$$

22. 若將 1, 2, 3, 4, 5, 6 六個數字全取排成六位數，下列何者不正確？

- (A) 4 的倍數有 192 個  
(B) 6 的倍數有 360 個  
(C) 大於 600000 的六位數有 120 個  
(D) 小於 600000 的六位數有 610 個  
(E) 若所有六位數的總和為  $m \times (10^6 - 1)$ ，則  $m = 280$

解：(A) ○：末二位數為 4 的倍數 12, 16, 24, 32, 36, 52, 56, 64

$$8 \times 4! = 192 \text{ (種)}$$

(B) ○：六個數字總和為 21，所以無論如何排列均是 3 的倍數，所以若又是偶數，即為 6 的倍數  $3 \times 5! = 360$  (種)

(C) ○：大於 600000  $6 \times 5! = 120$  (種)

(D) ×：小於 600000  $6! - 120 = 600$  (種)

(E) ○： $(1+2+3+4+5+6) \times 5! \times 111111 = 21 \times 120 \times 111111 = 280 \times 999999 = 280 \times (10^6 - 1)$ ，故選(D)

23. 已知  $a = 1 - 2^p$ ， $b = 1 - 2^{-p}$ ，若以  $a$  表示  $b$ ，則  $b$  為下列何值？

- (A)  $\frac{a-1}{a}$  (B)  $\frac{2-a}{a-1}$  (C)  $\frac{a}{a-1}$  (D)  $\frac{2-a}{1-a}$  (E)  $\frac{a}{1-a}$

解：因  $a = 1 - 2^p$ ，故  $2^p = 1 - a$ 。

$$\text{於是 } b = 1 - 2^{-p} = 1 - \frac{1}{2^p} = \frac{2^p - 1}{2^p} = \frac{-(1 - 2^p)}{2^p} = \frac{-a}{1-a} = \frac{a}{a-1},$$

所以選(C)

24. 設  $f(x) = 3x^4 + 8x^3 + 10x^2 + 7x + 2$ ，下列何者為  $f(x)$  的因式？

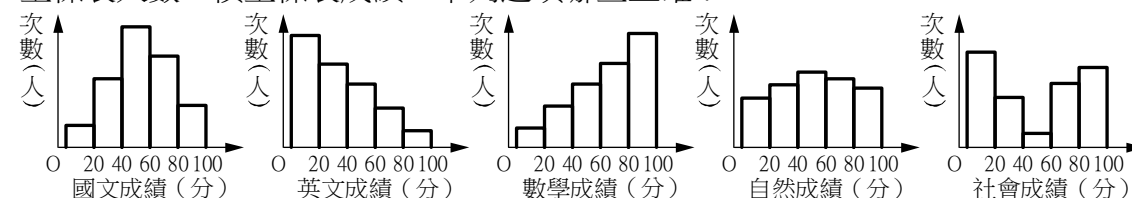
- (A)  $x+3$  (B)  $3x+1$  (C)  $2x+1$  (D)  $2x-1$  (E)  $3x+2$

解：(A)(C)(D)由一次因式檢驗法知，均不可能為  $f(x)$  之因式

$$\begin{array}{r} 3+8+10+7+2 \\ -1-\frac{7}{3} \\ \hline 3+7 \end{array} \quad \begin{array}{l} -\frac{1}{3} \\ \text{不能整除} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3+8+10+7+2 \\ -2-4-4-2 \\ \hline 3+6+6+3, 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} -\frac{2}{3} \\ \text{整除, 故選(E)} \end{array}$$

25. 附圖的五個圖形是某校高三學生參加學測各科成績的次數分配表的直方圖，其縱坐標表人數，橫坐標表成績，下列選項哪些正確？



- (A) 算術平均數：國文 < 數學 (B) 標準差：英文 < 數學 (C) 中位數：數學 < 社會  
(D) 標準差：自然 > 社會 (E) 以上皆非

解：(A) 數學成績 60~100 的人數比國文多，平均分數學大於國文

(B) 英文與數學只是高低分的次序不同，所次只是平均數不同，但標準差相同。

(C) 社會中位數在 40~60，但數學中位數大於 60

(D) 由圖中發現自然較平均，社會變異較大，所以自然標準差較小，所以選(A)

~ 本試題結束 ~